Une conjecture en théorie des partitions

Michel Lassalle*
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau, France
e-mail: lassalle @ labri.u-bordeaux.fr

February 8, 2008

Abstract

Nous présentons une conjecture qui se formule de manière élémentaire dans le cadre de la théorie des partitions.

1 Introduction

Nous revenons dans cette Note sur une conjecture que nous avons été conduit à formuler dans un précédent article [1]. Cette conjecture s'exprime dans le cadre de la théorie classique des partitions. Il est remarquable que sa formulation ne nécessite que des notions extrêmement élémentaires. Nous la présentons ici sous sa forme la plus naturelle, et nous explicitons plusieurs de ses conséquences.

2 Notations

Une partition λ est une suite décroissante finie d'entiers positifs. On dit que le nombre n d'entiers non nuls est la longueur de λ. On note $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et $n = l(\lambda)$. On dit que $|\lambda| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ est le poids de λ, et pour tout entier $i \geq 1$ que $m_i(\lambda) = card\{j : \lambda_j = i\}$ est la multiplicité de i dans λ. On identifie λ à son diagramme de Ferrers $\{(i,j) : 1 \leq i \ \leq l(\lambda), 1 \ \leq j \ \leq \lambda_i\}$. On pose

$$z_\lambda = \prod_{i\geq 1} i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda)!.$$

*Centre National de la Recherche Scientifique, France

Nous avons introduit dans [1] la généralisation suivante du coefficient binomial classique. Soient λ une partition et r un entier ≥ 0. On note $\left\langle {\lambda \atop r} \right\rangle$ le nombre de façons dont on peut choisir r points dans le diagramme de λ de telle sorte que *au moins un point soit choisi sur chaque ligne de* λ.

Soient X une indéterminée et n un entier ≥ 1. On note désormais

$$(X)_n = X(X+1)...(X+n-1)$$

$$[X]_n = X(X-1)...(X-n+1).$$

les coefficients hypergéométriques "ascendant" et "descendant" classiques. On pose

$$\binom{X}{n} = \frac{[X]_n}{n!}.$$

3 Notre conjecture

Il s'agit d'une généralisation de la propriété classique suivante, qui est par exemple démontrée au Chapitre 1, Section 2, Exemple 1 du livre de Macdonald [3]. Soit X une indéterminée. Pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\sum_{|\mu|=n} (-1)^{n-l(\mu)} \frac{X^{l(\mu)}}{z_\mu} = \binom{X}{n},$$

$$\sum_{|\mu|=n} \frac{X^{l(\mu)}}{z_\mu} = \binom{X+n-1}{n}.$$

Ces deux relations sont équivalentes en changeant X en $-X$.

Dans [1] nous avons formulé la conjecture suivante qui généralise ce résultat. Soit X une indéterminée. Pour tous entiers $n, r, s \geq 1$ nous avons conjecturé l'identité

$$\sum_{|\mu|=n} (-1)^{r-l(\mu)} \frac{\left\langle {\mu \atop r} \right\rangle}{z_\mu} X^{l(\mu)-1} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} (\mu_i)_s \right)$$
$$= (s-1)! \binom{n+s-1}{n-r} \sum_{k=1}^{\min(r,s)} \binom{X-s}{r-k} \binom{s}{k}.$$

Mais il est bien connu ([2], p.13) que la suite de polynômes $\{[X]_n, n \geq 0\}$ est du type binomial, c'est-à-dire qu'elle satisfait l'identité

$$[X+Y]_n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} [X]_{n-k}[Y]_k.$$

Nous sommes ainsi conduits à présenter notre conjecture sous la forme suivante qui est beaucoup plus naturelle.

Conjecture 1 *Soit X une indéterminée. Pour tous entiers $n, r, s \geq 1$ on a*

$$\sum_{|\mu|=n} (-1)^{r-l(\mu)} \frac{\left\langle {\mu \atop r} \right\rangle}{z_\mu} X^{l(\mu)-1} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} (\mu_i)_s \right) = (s-1)! \binom{n+s-1}{n-r} \left[\binom{X}{r} - \binom{X-s}{r} \right].$$

Ou de manière équivalente

$$\sum_{|\mu|=n} \frac{\left\langle {\mu \atop r} \right\rangle}{z_\mu} X^{l(\mu)-1} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} (\mu_i)_s \right) = (s-1)! \binom{n+s-1}{n-r} \left[\binom{X+r+s-1}{r} - \binom{X+r-1}{r} \right].$$

L'équivalence est obtenue en changeant X en $-X$. Comme on a

$$\left\langle {\mu \atop r} \right\rangle = 0 \qquad \text{si } r > |\mu|,$$

la Conjecture 1 est triviale pour $r > n$. Comme on a

$$\left\langle {\mu \atop r} \right\rangle = 0 \qquad \text{si } r < l(\mu),$$

la sommation au membre de gauche de la Conjecture 1 est limitée aux partitions μ telles que $l(\mu) \leq r$. Chacun des membres est ainsi un polynôme en X de degré $r-1$.

Comme on a

$$\left\langle {\mu \atop |\mu|} \right\rangle = 1,$$

la Conjecture 1 prend la forme suivante pour $r = n$.

Conjecture 2 *Soit X une indéterminée. Pour tous entiers $n, s \geq 1$ on a*

$$\sum_{|\mu|=n} (-1)^{n-l(\mu)} \frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} (\mu_i)_s \right) = (s-1)! \left[\binom{X}{n} - \binom{X-s}{n} \right].$$

Ou de manière équivalente

$$\sum_{|\mu|=n} \frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} (\mu_i)_s \right) = (s-1)! \left[\binom{X+n+s-1}{n} - \binom{X+n-1}{n} \right].$$

La Conjecture 2 est vérifiée pour $s = 1$ car on retrouve dans ce cas la propriété classique énoncée au commencement de cette section.

4 Commentaires

Nous avons vérifié la Conjecture 1 dans les cas particuliers suivants:

(i) pour $n \leq 7$ avec r et s arbitraires (au moyen d'un calcul explicite),

(ii) pour $s = 1$ avec n et r arbitraires (c'est le théorème 1 de [1]),

(iii) pour $r = 1, 2, 3$ avec n et s arbitraires (voir ci-dessous).

En général la Conjecture 1 se décompose en $r - 1$ conjectures obtenues en identifiant les coefficients de $X^k (0 \leq k \leq r-1)$ dans chaque membre.

Pour $k = 0$ la sommation au membre de gauche est limitée à la partition (n) de longueur 1. En identifiant les termes constants dans chaque membre, on obtient

$$(-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{n} (n)_s = (s-1)! \binom{n+s-1}{n-r} \binom{-s}{r}.$$

Cette identité est très facilement vérifiée.

D'autre part on a le développement

$$\left[\binom{X}{r} - \binom{X-s}{r} \right] = \frac{1}{r!} \left(rsX^{r-1} - \frac{r(r-1)}{2} s(r+s-1) X^{r-2} + \text{etc...} \right).$$

Le coefficient de X^{r-1} au membre de gauche de la Conjecture 1 correspond à la sommation sur les partitions μ de longueur r. Comme on a

$$\left\langle \begin{matrix} \mu \\ l(\mu) \end{matrix} \right\rangle = \prod_{i=1}^{l(\mu)} \mu_i = \prod_{i \geq 1} i^{m_i(\mu)},$$

en identifiant les coefficients de X^{r-1} dans chaque membre, on obtient la

Conjecture 3 *Pour tous entiers $n, r, s \geq 1$ on a*

$$(r-1)! \sum_{\substack{|\mu|=n \\ l(\mu)=r}} \frac{\displaystyle\sum_{i\geq 1} m_i(\mu)(i)_s}{\displaystyle\prod_{i\geq 1} m_i(\mu)!} = s! \binom{n+s-1}{n-r}.$$

Le coefficient de X^{r-2} au membre de gauche de la Conjecture 1 correspond à la sommation sur les partitions μ de longueur $r-1$. On voit facilement qu'on a

$$\left\langle \begin{matrix} \mu \\ l(\mu)+1 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{2} \left(|\mu| - l(\mu)\right) \prod_{i=1}^{l(\mu)} \mu_i.$$

En identifiant les coefficients de X^{r-2} dans chaque membre, on retrouve la même Conjecture 3, mais écrite en remplacant r par $r-1$.

La Conjecture 3 est vérifiée pour $s=0$ et $s=1$, avec n et r arbitraires (voir [1], page 462). Pour $s=0$ (resp $s=1$) le membre de gauche est égal au nombre de compositions (c'est-à-dire de multi-entiers) de poids n et de longueur r (resp. ce nombre multiplié par n/r).

La Conjecture 3 est également vérifiée pour $r=1$ et $r=2$, avec n et s arbitraires. Pour $r=1$ elle devient l'identité

$$(n)_s = s! \binom{n+s-1}{s}.$$

Pour $r=2$ elle s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n-1} (i)_s = s! \binom{n+s-1}{n-2}.$$

Cette identité est vérifiée car elle est équivalente à la propriété classique suivante

$$\binom{N}{k} = \sum_{i=1}^{N-1} \binom{i}{k-1}.$$

Nous généralisons ce résultat au moyen de la conjecture suivante.

Conjecture 4 *Pour tous entiers $n, r, s \geq 1$ on a.*

$$(r-1)! \sum_{\substack{|\mu|=n \\ l(\mu)=r}} \frac{\displaystyle\sum_{i\geq 1} m_i(\mu)(i)_s}{\displaystyle\prod_{i\geq 1} m_i(\mu)!} = \sum_{i=1}^{n-r+1} \binom{n-i-1}{r-2} (i)_s.$$

La Conjecture 4 permet de démontrer facilement la Conjecture 3 au moyen d'une récurrence sur l'entier r. Nous l'avons vérifiée explicitement pour $r \geq n - 7$ avec n et s arbitraires.

References

[1] M. Lassalle, *Quelques conjectures combinatoires relatives à la formule classique de Chu -Vandermonde*, Adv. in Appl. Math. **21** (1998), 457–472.

[2] D. Loeb, G.C. Rota, *Formal power series of logarithmic type*, Adv. in Appl. Math. **75** (1989), 1–118.

[3] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Clarendon Press, second edition, Oxford, 1995.